ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2023-2024 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям очного тура
9-10 классы

Вариант 1

Задание №1

Имеем: $3-2\cdot\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$; $3+2\cdot\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2$.

Далее:

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\frac{4(6+\sqrt{2})}{\sqrt{34}}\cdot\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}=(\sqrt{2}-1)^2+2(6+\sqrt{2})=2-2\sqrt{2}+1+12+2\sqrt{2}=15$$

Ответ: 15

Задание №2

Пусть S – расстояние в км от дома до школы, t – время в часах от выхода ученика из дома до начала урока в школе, v – скорость, с которой должен идти ученик, чтобы прийти точно к началу урока. Тогда имеем следующую систему:

$$\frac{S}{3}=t+\frac{1}{60},\frac{S}{4}=t-\frac{1}{20}.$$

Отсюда $S=\frac{4}{5},t=\frac{1}{4}.=>v=\frac{S}{t}=\frac{16}{5}=3{,}2$ км/час

Ответ: 3,2 км/час

Задание №3

Имеем:

$(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2},\left(3-2\sqrt{2}\right)^2=17-12\sqrt{2}$; $7+5\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^3$.

Следовательно, левое число равно:

$$\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1=2\sqrt{2}.$$

Значит числа равны

Ответ: числа равны

Задание №4

ОДЗ $x \geq \frac{1}{2}$. В ОДЗ уравнение можно записать в виде:

$$\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)=4.$$

Левая часть этого равенства есть произведение возрастающих функций в ОДЗ. А тогда левая часть также является возрастающей функцией. Поэтому эта функция может равняться четырем не более чем в одной точке. Подбором убеждаемся, что подходит $x=7$.

Ответ: 7

Задание №5

Вычитая каждое из уравнений из суммы двух остальных, получим

$$zy=12, zx=8, yx=6.$$

Умножая эти равенства, получим:

$$x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 576 = 24^2 => x \cdot y \cdot z = \pm 24.$$

Разделяя это равенства на каждое из предыдущих, получим:

$$x=\pm 2, y=\pm 3, z=\pm 4.$$

Комбинируя знаки, получим 8 решений. Однако проверка показывает, что система имеет лишь два решения: $(2; 3; 4)$ и $(-2;\ -3;\ -4)$.

Ответ: $(2; 3; 4)$ и $(-2;\ -3;\ -4)$

Задание №6

Заменяем данное неравенство на равносильное:

$$(|x-2|-|x|)\cdot(|x-2|+|x|)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{1-x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{1-x}\right)>0$$

$$<=> \left((x-2)^2-x^2\right)\cdot(x+2-1+x)>0$$

$$<=> (x-2-x)\cdot(x-2+x)\cdot(2x+1))>0$$

$$<=> (x-1)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)<0 => x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$

Задание №7

Пусть $x \neq \frac{k\pi}{2}$. Тогда для всех таких x выполняется неравенство $|\sin x| < 1$, $|\cos x| < 1$. А следовательно $\cos^3 x < \cos^2 x, \sin^3 x < \sin^2 x$.

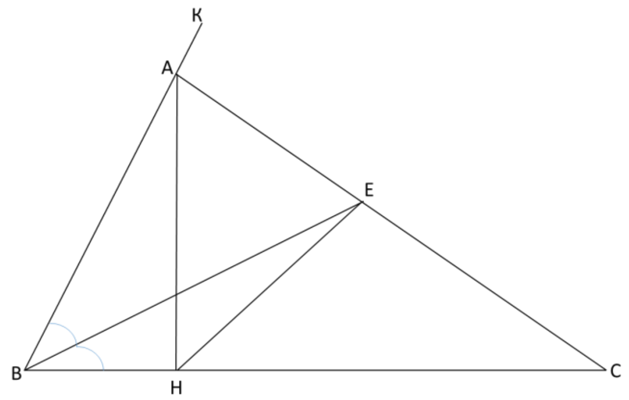
Отсюда $\cos^3 x + \sin^3 x < \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

А тогда решением будет $x = 2\pi k, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$

Ответ: $\left\{2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi m \;\; m, k \; \in Z\right\}$

Задание №8

Пусть ABC данный треугольник, где AH – высота, BE – биссектриса, а угол BEA $= 45°$. Найти угол EHC.



Решение:

Пусть K – точка на продолжении BA за т. A.

Покажем, что AC есть биссектриса угла HAK обозначим ∠B=2 α.

Тогда ∠BAH=$90° - 2\alpha$ ∠HAC=$90° - 45° + \alpha = 45° + \alpha$,

∠CAK $= 180° - 90° + 2\alpha - 45° - \alpha = 45° + \alpha$. Следовательно ∠HAC=∠CAK $= 45° + \alpha$.

Значит AC – биссектриса внешнего угла A. А тогда т. E есть пересечение биссектрисы BE, биссектрисы AC и отрезка HE, который является биссектрисой прямого угла H. Поэтому искомый угол равен 45°.

Ответ: 45°

Задание №9

Данное уравнение можно представить в виде:

$$(x+y+3)(2x+3y-1)=3$$

Так как x, y по условию целые числа, то равенство возможно, если

$\begin{cases} x+y+3=1 \\ 2x+3y-1=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+3=3 \\ 2x+3y-1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+3=-3 \\ 2x+3y-1=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+3=-1 \\ 2x+3y-1=-3 \end{cases}$

Решая эти системы, получим 4 решения, которые, как показывает проверка, удовлетворяют начальному уравнению.

Ответ: $(-2;2), (-10;8), (-18;12), (-10;6)$

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2023-2024 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям очного тура
9-10 классы

Вариант 2

Задание №1

Преобразуя первую дробь, имеем:

$$\frac{a^2-4+c^2(2-a)}{(a+c^2)(a-c^2+2)}=\frac{(a-2)(a+2-c^2)}{(a+c^2)(a+2-c^2)}=\frac{a-2}{a+c^2}$$

Преобразуя вторую дробь имеем:

$$\frac{(\mathrm{a}-2)^2}{(\mathrm{a}+c^2)(\mathrm{a}-2)}=\frac{\mathrm{a}-2}{\mathrm{a}+c^2}$$

Значит все выражение равно нулю.

Ответ: 0

Задание №2

Пусть V – скорость гребца, x км/час – скорость течения. Тогда по условиям задачи получим равенство:

$\frac{1-\mathrm{x}/6}{\mathrm{x}}=\frac{\frac{V+\mathrm{x}}{6}-1}{V-\mathrm{x}}$.

Отсюда имеем $(6-\mathrm{x})(V-\mathrm{x})=\mathrm{x}(V+x-6)$. Раскрывая скобки, получим:

$$6V-6x-Vx+x^2=Vx+x^2-6x => x=3$$

Ответ: 3 км/час

Задание №3
Запишем уравнение в виде:

$$\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{3x^2-1}=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+2x+4}$$

Воспользуемся формулой $\sqrt{а}-\sqrt{в}=\frac{а-в}{\sqrt{а}+\sqrt{в}}$. Тогда уравнение будет иметь вид:

$$\frac{2(x+1)}{\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3x^2-1}}=\frac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}}$$

Отсюда $x=-1$ есть корень уравнения, что легко проверяется. Если $x\neq-1$, то обе части уравнения будут иметь разные знаки, следовательно, других корней нет.

Ответ: -1

Задание №4

Делим число 31973197 на 3197. Получим 10001. Аналогично число 76787678 делим на число 7678, также получим 10001. Следовательно: $\frac{31973197}{76787678}=\frac{3197}{7678}$. Значит эти числа равны.

Ответ: числа равны.

Задание №5
Деля первое уравнение на второе и первое на третье, получим

$$\frac{x+z}{x+y}=\frac{4}{3},\frac{y+z}{x+y}=\frac{5}{3}$$

Значит:

$$\begin{cases} x+4y-3z=0 \\ 5x+2y-3z=0 \end{cases} => \begin{cases} 1+4\frac{y}{x}-3\frac{z}{x}=0 \\ 5+2\frac{y}{x}-3\frac{z}{x}=0 \end{cases} => \frac{y}{x}=2,\frac{z}{x}=3 => y=2x,z=3x$$

Подставляя в первое уравнение, получим: $x^2=4 => x=\pm2$.

Ответ: $(2;4;6),(-2;-4;-6)$

Задание №6

Данное уравнение можно представить в виде:
$(2x + y - 3)(x - 2y + 1) = 2$. Так как по условию x ,y - целые числа, то равенство возможно при условии:

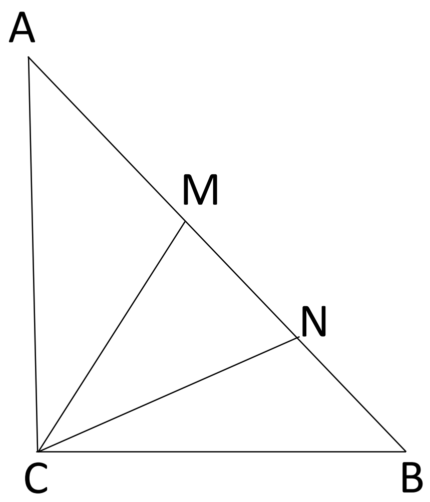
$$\begin{cases}2x + y - 3 = 1\\ x - 2y + 1 = 2\end{cases}, \begin{cases}2x + y - 3 = -1\\ x - 2y + 1 = -2\end{cases}, \begin{cases}2x + y - 3 = 2\\ x - 2y + 1 = 1\end{cases}, \begin{cases}2x + y - 3 = -2\\ x - 2y + 1 = -1\end{cases}$$

Решая эти системы, находим два решения. Это будет:

$$x = 0, y = 1; x = 2, y = 1$$

Ответ: (0;1), (2;1)

Задание №7



Дано ACB – прямоугольный треугольник, AB – гипотенуза, BC= BM, AC=AN. Найти угол MCN.

Решение

Пусть $\angle MCN = \beta$, а угол B равен α

Имеем:

$$\angle ANC = 45° + \frac{\alpha}{2}, \angle ACN = 45° + \frac{\alpha}{2} +$$

$$\angle \text{CMB} = 90° - \frac{\alpha}{2}, \angle \text{BCM} = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

Тогда

$\angle CNB = 180° - \angle CNA = 135 - \frac{\alpha}{2} +$

$$\angle NCB = 180° - \alpha - 135 + \frac{\alpha}{2} = 45° - \frac{\alpha}{2}$$

А тогда угол $\beta = 90° - \frac{\alpha}{2} - 45° + \frac{\alpha}{2} = 45°$

Ответ: 45

Задание №8

Пусть $x \neq \frac{k\pi}{2}$, тогда $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$, тогда $\sin^3 x \leq \sin^2 x$, а $\cos^3 x \leq cos^2 x$. Следовательно,

$$\sin^3 x - \cos^3 x \leq \sin^2 x + cos^2 x = 1$$

Поэтому равенство возможно лишь в точках: $\frac{k\pi}{2}$.

Отсюда решение будет:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad x = \pi + 2\pi m \;\; k, m \in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pi + 2\pi m \;\; k, m \in Z$

Задание №9

ОДЗ: $x \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$

Данное неравенство в ОДЗ будет равносильным:

$$(|2x-1| - |x+2|)(|2x-1| + |x+2|) \cdot \left(\sqrt{1+2x} - \sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{1+2x} + \sqrt{2-x}\right) > 0$$

Отсюда имеем:

$$\left((2x-1)^2 - (x+2)^2\right)(1+2x+x-2) > 0 <=> (2x-1-x-2)(2x-1+x+$$
$$+2)(3x-1) > 0 <=> (x-3)(3x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right) > 0$$

Решая методом интервалов с учетом ОДЗ получим:

Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$